SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

M. CICOGNANI

LA PROPAGAZIONE DELLE SINGOLARITA' GEVREY NEL PROBLEMA DI CAUCHY PER OPERATORI IPERBOLICI CON COEFFICIENTI HÖLDERIANI IN t E DI CLASSI DI GEVREY IN x

5 MARZO 1987

IL PROBLEMA DI CAUCHY

Vari autori hanno considerato il problema di Cauchy per operatori con parte principale iperbolica e coefficienti hölderiani in t e di classe di Gevrey in $x \in R^n$, provandone la buona positura in opportuni spazi di Gevrey di funzioni ed ultradistribuzioni. I primi risultati in questa direzione sono stati ottenuti in [C. De G.S.] e [C.J.S.] per operatori del secondo ordine con coefficienti hölderiani dipendenti solo da t, sono stati estesi in [N] ad operatori con coefficienti dipendenti anche da x e recentemente ad operatori di ordine superiore in [O.T.].

Il risultato che riguarda più da vicino la presente esposizione è il seguente teorema.

Teorema 1. [C. De G.S.], [N]. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\text{(C.P.)}\qquad \begin{cases} P(t,x;D_t,D_x)u(t,x) = f(t,x) \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x) \qquad j=0,1 \end{cases}$$

in $[0,T] \times R_x^n$ per $P(t,x;D_t,D_x) = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)D_{x_i}D_{x_j} + b(t,x)D_t +$
$+ \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x)D_{x_i} + d(t,x)$, $D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial t_i}$, $D_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_i}$

Assumiamo le seguenti ipotesi:

$$(R_x)\qquad a_{ij}, b, c_i, d \in C([0,T];\ G^{(\sigma)}(R_x^n))$$

$$0<\exists\,\chi<1:\ \frac{a_{ij}(t,x)-a_{ij}(s,x)}{(t-s)^{\chi}} \in G^{(\sigma)}(R_x^n) \text{ uniformemente per } (t,s)\ \ [0,T]^2,\ t\neq s.$$

$$(S.H)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \delta|\xi|^2 \qquad (\delta>0)$$

(W.P.) $\quad 1<\sigma<(1-\chi)^{-1}$.

Allora se denotiamo con $V^{(\sigma)}$ lo spazio delle funzioni Gevrey $G^{(\sigma)}(R^n)$ o lo spazio di ultradistribuzioni $G^{(\sigma)'}(R^n)$ vale la seguente affermazione:

(i) $\forall g_0, g_1 \in V^{(\sigma)}$, $\forall f \in C([0,T];V^{(\sigma)}) \exists$ una ed una sola $u \in C^2([0,T];V^{(\sigma)})$ soluzione di (C.P.).

Vale inoltre il seguente risultato di ottimalità per l'ipotesi (WP):

(ii) $\forall \sigma>1$, $0<\forall \chi<1$, tali che $\sigma>(1-\chi)^{-1}$ $\exists\, a(t) \in C^{0,\chi}([0,T]), a(t) \geq c>0$ ed $\exists g_0, g_1 \in G^{(\sigma)}(R)$ tali che il problema

$$\begin{cases} (D_t^2 - a(t)D_x^2)u(t,x) = 0 \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x) \end{cases}$$

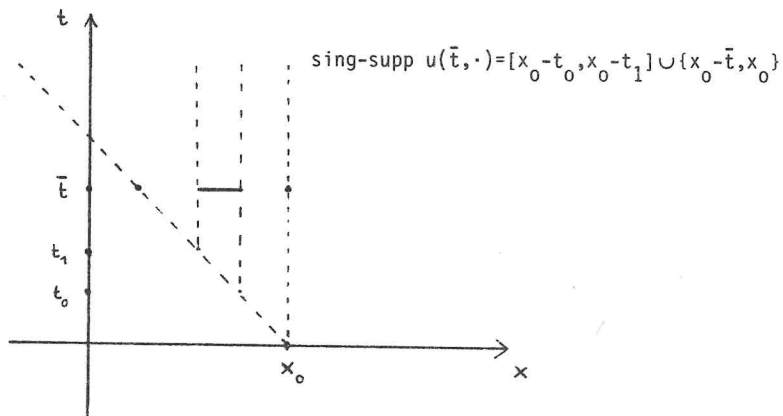
non ha soluzioni in $C^2([0,t_0];G^{(\sigma)}(R))$ $\quad \forall t_0 \in (0,T]$.

In tutti i lavori citati, tranne [O.T.], i risultati sono stati ottenuti col metodo delle stime dell'energia della soluzione. In [O.T.] viene costruita una parametrice per il problema di Cauchy con metodi che si ispirano a quelli usati in [B].

La propagazione delle singolarità Gevrey della soluzione non è stata trattata dagli autori sopra citati; infatti questo aspetto del problema di Cauchy iperbolico in classi di Gevrey è generalmente studiato per operatori con coefficienti in $G^{(\sigma)}([0,T]\times R^n_x)$, cioè egualmente regoalti in t ed x, si vedano ad esempio [W],[Mz],[T],[M.T.]. Volendo trattare operatori con coefficienti irregolari in t, la prima cosa da verificare è se il fronte d'onda spaziale $W_\sigma(u(\bar{t},\cdot))$ della soluzione u ad un tempo fissato E possa risentire o meno delle singolarità rispetto a t dei coefficienti in istanti precedenti $\bar{t}$. Tra

mite esempi si vede che la risposta è affermativa. In figura è rappresentato l'insieme sing-supp $u(\bar{t},\cdot)$ per $u(t,x)$ soluzione di

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_t \partial_x + b(t)\partial_t)u(t,x) = 0 & \text{in } R_t^+ \times R_x \\ u(0,x) = 0 & \\ \partial_t u(0,x) = \delta(x-x_0) & \end{cases}$$

con $b(t) \in C(R_t^+)$, sing-supp $b = [t_0,t_1]$.

In [C] si trova la discussione di una classe di questi esempi e vengono stimate esattamente le interferenze tra singolarità in t dei coefficienti e singolarità in x della soluzione.

RISULTATI PRINCIPALI

Introduciamo alcune classi di simboli di ordine finito simili a quelle considerate in [T] e [MT] e una classe di simboli di ordine infinito simile a quella studiata in [CZ].

Definizione. Sia $\sigma>1$, $\mu\in[1,\sigma]$. Diremo che un simbolo $a(x,\xi)$ è in $S^{m,\sigma,\mu}$ se vale

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|\leq CA^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\mu\beta!^\sigma\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{per } |\xi|>B|\alpha|^\sigma+B_0$$

con costanti $A\geq0$, $B\geq0$, $B_0>0$, $C\geq0$, $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Diremo che appartiene ad R^σ se

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|\leq C_\alpha A^{|\beta|}\beta!^\sigma\exp(-h\langle\xi\rangle^{1/\sigma}) \quad \text{per } |\xi|>B_0$$

con $c_\alpha\geq0$, $A\geq0$, $h>0$, $B_0>0$.

Diremo che appartiene alla classe $S^{\infty,\sigma,\mu}$ se $\forall\varepsilon>0$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|\leq C_\varepsilon A^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\mu\beta!^\sigma\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\exp(\varepsilon\langle\xi\rangle^{1/\sigma}) \quad \text{per } |\xi|>B|\alpha|^\sigma+B_0$$

con A, B, B_0 indipendenti da ε.

Inoltre per $0<\chi<1$, $C^\chi([0,T];S^{m,\sigma,\mu})$ denota lo spazio degli $a(t,x,\xi)$ tali che $a(t,x,\xi)\in C([0,T];S^{m,\sigma,\mu})$ e

$$\frac{a(t,x,\xi)-a(s,x,\xi)}{(t-s)^\chi}\in S^{m,\sigma,\mu} \text{ uniformemente in } (t,s)\in[0,T]^2,\ t\neq s,$$

e per $\mathscr{I}$ insieme aperto di $[0,T]$, $\Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I};S^{m,\sigma,\mu})$ denota lo spazio degli $a(t,x,\xi)$ tali che $\forall K\subset\mathscr{I}$, K compatto, vale

$$|D_t^\gamma D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t,x,\xi)| \le C_K A^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \alpha!^\mu \beta!^\sigma \gamma!^\sigma \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} \qquad \text{per } t\in K,$$

$|\xi|>B|\alpha|^\sigma+B_0$ con A,B,B_0 indipendenti da K. Infine $\Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I};S^{\infty,\sigma,\mu})$ denota lo spazio degli $a(t,x,\xi)$ tali che $\forall K\subset\mathscr{I}$ compatto e $\forall\varepsilon>0$ si ha

$$|D_t^\gamma D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t,x,\xi)| \le C_{K,\varepsilon}\ A^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \alpha!^\mu \beta!^\sigma \gamma!^\sigma \langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \exp(\varepsilon\langle\xi\rangle^{1/\sigma})$$

per $t\in K$, $|\xi|>B|\alpha|^\sigma+B_0$ con A,B,B_0 indipendenti da K ed ε.

Quando B=0 nelle precedenti definizioni scriveremo $\tilde{S}^{m,\sigma,\mu}$ ed $\tilde{S}^{\infty,\sigma,\mu}$ in luogo di $S^{m,\sigma,\mu}$ ed $S^{\infty,\sigma,\mu}$.

Possiamo ora enunciare i risultati principali di questa esposizione.

<u>Teorema 2.</u> Il problema di Cauchy

$$(C.P.)_\psi \qquad \begin{cases} P(t,x;D_t,D_x)u(t,x) = f(t,x) \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x), \quad j=0,1 \end{cases}$$

in $[0,T]\times R_x^n$ per $P(t,x;D_t,D_x) = D_t^2 + a_1(t,x,D_x)D_t + a_2(t,x,D_x) + b_0(t,x,D_x)D_t + b_1(t,x,D_x) + c_0(t,x,D_x)$ nelle ipotesi seguenti

$(R_\chi)_\psi$ $\quad a_j(t,x,\xi)\in C^\chi([0,T];\tilde{S}^{j,\sigma,1})$, $j = 1,2$

$\quad b_j(t,x,\xi),\ c_j(t,x,\xi)\in C([0,T];\tilde{S}^{j,\sigma,1})$

$(S.H.)_\psi$ $\quad \tau^2+a_1(t,x,\xi)\tau+a_2(t,x,\xi)=(\tau-\lambda_1(t,x,\xi))(\tau-\lambda_2(t,x,\xi))$ con $\lambda_j(t,x,\xi)$ reali,

$\quad \lambda_j(t,x,\xi)\in C^\chi([0,T];\tilde{S}^{1,\sigma,1})$ tali che $|\lambda_1(t,x,\ )-\lambda_2(t,x,\xi)|>\delta|\xi|$

$\quad$ per $|\xi|>B_0$

può essere ricondotto al seguente problema per un sistema

$$(C.P.)_S \quad \begin{cases} L(t,x;D_t,D_x)U = F(t,x) \\ U(0,x) = G(x) \end{cases}$$

$$L = D_t - \begin{bmatrix} \lambda_1(t,x,D_x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t,x,D_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(t,x,D_x) & c_{12}(t,x,D_x) \\ c_{21}(t,x,D_x) & c_{22}(t,x,D_x) \end{bmatrix}$$

con $c_{ij} \in C([0,T]; \tilde{S}^{(1-\chi),\sigma,1})$.

Se $a_j, b_j, c_j \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I}; \tilde{S}^{j,\sigma,1})$ allora $c_{ij} \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I}; S^{(1-\chi),\sigma,\sigma})$ per $\mathscr{I}$ aperto di $[0,T]$.

<u>Teorema 3.</u> Consideriamo il problema di Cauchy

$$(C.P.)_S \quad \begin{cases} L(t,x;D_t,D_x)U(t,x) = F(t,x) \\ U(0,x) = G(x) \end{cases}$$

per $L = D_t - \begin{bmatrix} \lambda_1(t,x,D_x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t,x,D_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(t,x,D_x) & c_{12}(t,x,D_x) \\ c_{21}(t,x,D_x) & c_{22}(t,x,D_x) \end{bmatrix}$

Assumiamo che valga una delle due seguenti alternative

$(I)_1$ $\lambda_1(t,x,\xi)$ e $\lambda_2(t,x,\xi)$ reali e della forma $\lambda_1(t,x,\xi)=\alpha(t)\mu_1(x,\xi)$ $\lambda_2(t,x,\xi) = \alpha(t)\mu_2(x,\xi)$ con $\alpha(t) \geq c > 0$, $\alpha \in C([0,T])$, $\mu_1, \mu_2 \in \tilde{S}^{1,\sigma,1}$ omogenei tali che

$\{\mu_1,\mu_2\} = a(\mu_1-\mu_2)$

con $\{\mu_1\mu_2\} = \nabla_x\mu_1\cdot \nabla_\xi\mu_2 - \nabla_x\mu_2\cdot \nabla_\xi\mu_1$, a costante ;

$(I)_2$ $\lambda_1(t,x,\xi)$ e $\lambda_2(t,x,\xi)$ reali e della forma $\lambda_1(t,x,\xi)=\alpha_1(t)\mu(x,\xi)$

$\lambda_2(t,x,\xi)=\alpha_2(t)\mu(x,\xi)$ con $\alpha_1,\alpha_2\in C([0,T])$, $\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\geq c>0$,

$\mu\in \tilde{S}^{1,\sigma,1}$, μ omogeneo.

Assumiamo inoltre

$(S.H.)_s$ $|\lambda_1(t,x,\xi)-\lambda_2(t,x,\xi)|\geq \delta|\xi|$ per $|\xi|>B_0$

(R) $\lambda_1,\lambda_2\in \Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I};\tilde{S}^{1,\sigma,1})$, $c_{ij}\in C([0,T];\tilde{S}^{q,\sigma,1})\cap\Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I};\tilde{S}^{q,\sigma,1})$

con $0<q<1$, $\mathscr{I}$ aperto di $[0,T]$;

$(W.P.)_s$ $1<\sigma<q^{-1}$.

Allora se $F(t,x)\in C([0,T];G^{(\sigma)}(R^n_x))$ e $G(x)\in G_0^{(\sigma)'}(R^n_x)$ per la soluzione $U(t,x)$ di $(C.P.)_s$ vale

$$WF_\sigma(U(t,\cdot))\subset \overline{\bigcup_{\nu=0}^{\infty} \Gamma^t_\nu(\mathscr{I})}$$

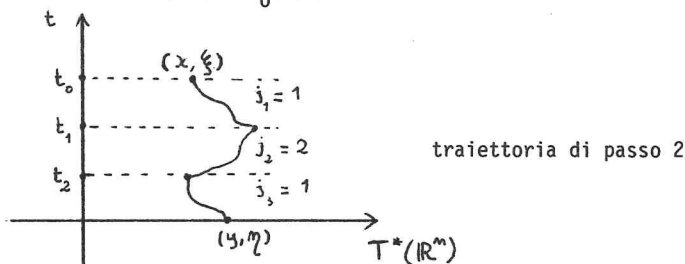
con gli insiemi $\Gamma^t_\nu(\mathscr{I})$ definiti come segue:

$\Gamma^t_\nu(\mathscr{I})=$ {punti finali delle traiettorie di passo ν con diramazioni in $[0,T]\setminus\mathscr{I}\}^{con}$.

Una traiettoria di passo ν con diramazioni in $t_1, t_2, \dots, t_\nu \in [0,T] \setminus \mathscr{S}$, $t=t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1}=0$, è una curva continua $(x(\tau),\xi(\tau))$ che in ciascun intervallo $[t_h, t_{h-1}]$ per $h=1,\dots,\nu+1$ risolve le equazioni

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_\xi \lambda_{j_h}(\tau,x,\xi) \quad , \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \nabla_x \lambda_{j_h}(\tau,x,\xi) \quad , \quad j_h \in \{1,2\},\ j_h \neq j_{h+1},$$

con punto iniziale $(y,\eta) \in WF_\sigma(G)$ per $\tau=0$.

traiettoria di passo 2

Col teorema 2 si riottengono i risultati di buona positura enunciati nel teorema 1. Per mezzo del teorema 3 otteniamo stime del fronte d'onda $WF_\sigma(u(t,\cdot)) \cup WF_\sigma(D_t u(t,\cdot))$ della soluzione di $(C.P.)_\psi$ e della sua derivata se le radici caratteristiche di P soddisfano le ipotesi $(S.H.)_\psi$ ed una tra $(I)_1$ e $(I)_2$. Infatti se $(C.P.)_s$ è il problema derivato da $(C.P.)_\psi$ tramite il teorema 2, si ha $W_\sigma(G)=WF_\sigma(g_0) \cup WF_\sigma(g_1)$ e $WF_\sigma(U(t,\cdot))=WF_\sigma(u(t,\cdot)) \cup WF_\sigma(D_t u(t,\cdot))$. Il risultato di propagazione qui stabilito si applica ad operatori differenziali strettamente iperbolici con parte principale del tipo

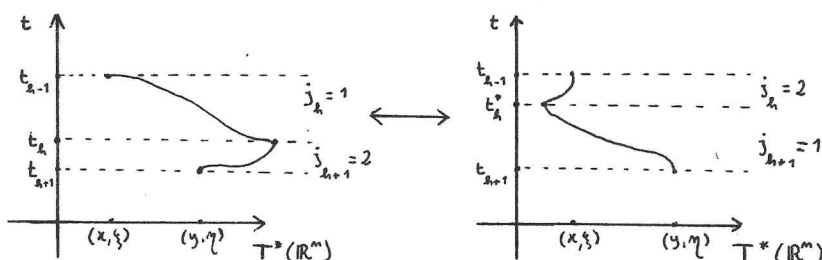
$$D_t^2 - \alpha(t) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{x_i} D_{xj}$$

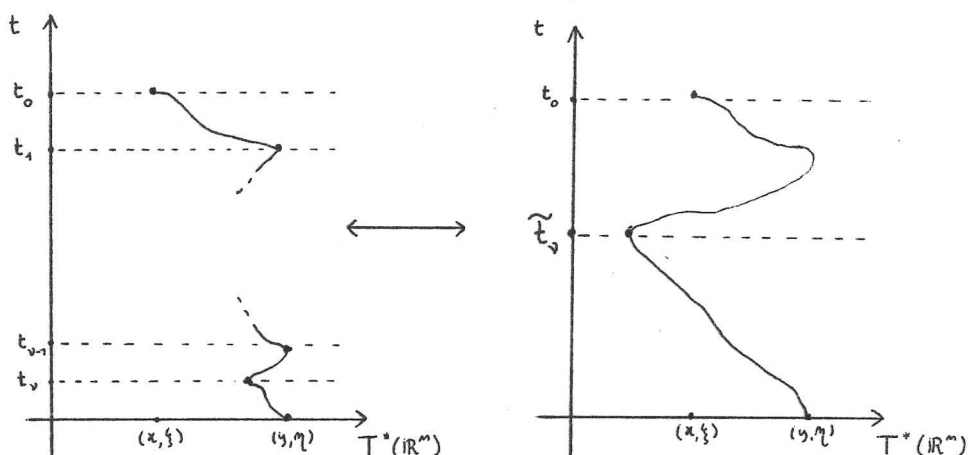
e soddisfacenti le ipotesi (R_x), (S.H.), (W.P.) del teorema 1; come $\mathscr{S}$ sceglieremo il più grande insieme aperto di [0,T] tale che i coefficienti di P sono in $G^{(\sigma)}(\mathscr{S} \times R_x^n)$.

Osserviamo che nel caso $\mathscr{S} = [0,T]$ il risultato del teorema 3 si riduce alle ben note stime del fronte d'onda della soluzione per un operatore differenziale con caratteristiche di molteplicità costante e coefficienti

di classe di Gevrey in (t,x).

Discutiamo ora il significato geometrico delle ipotesi $(I)_1$ ed $(I)_2$. Innanzitutto diremo equivalenti due traiettorie che abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Se vale una delle due alternative $(I)_1$ o $(I)_2$ allora si ha il seguente risultato:

Proposizione 4. Esiste una funzione $A(t)$ di classe C^1 con la sua inversa tale che ogni traiettoria di passo 1 nell'intervallo $[t_{h+1},t_{h-1}]$ con punto di diramazione t_h $[t_{h+1},t_{h-1}]$ è equivalente alla traiettoria di passo 1 e punto di diramazione $t_h^* = A^{-1}(A(t_{h+1})-A(t_h)+A(t_{h-1}))$ per la quale gli indici j_h e j_{h+1} sono scambiati rispetto alla traiettoria considerata.

Così ogni traiettoria di passo ℓ e punti di diramazione $t_h,t_{h+1},\dots,t_{h+\ell-1} \in [t_{h+\ell},t_{h-1}]\setminus\mathscr{I}$ è equivalente ad una traiettoria di passo 1 e punto di diramazione $\tilde{t}_\ell \in \mathscr{F}_\ell(t_{h+\ell},t_{h-1})$ dove l'insieme $\mathscr{F}_\ell(t_{h+\ell},t_{h-1})$ è completamente caratterizzato da $\mathscr{I}$, $t_{h+\ell}$, t_{h-1} e dalla funzione A. Se $\mathscr{F}(t) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathscr{F}_\nu(0,t)$ allora la tesi del teorema 3 può essere riscritta in modo equivalente come segue:

$WF_\sigma(U(t,\cdot)) \subset$ [{punti finali delle traiettorie di passo 1 con punto di diramazione in $\mathscr{F}(t)$ e punto iniziale in $WF_\sigma(G)$} $\cup$ {punti finali di traiettorie di passo zero con punto iniziale in $WF_\sigma(G)$ }]^{con}.

Non daremo qui la dimostrazione del teorema 2 che può essere ottenuta con opportuni regolarizzanti dei simboli λ_1 e λ_2 usando argomenti simili a quelli di [I].

La dimostrazione del teorema 3 fa uso di una parametrice del problema $(C.P.)_s$ rappresentata per mezzo di operatori integrali di Fourier con ampiezze in $S^{\infty,\sigma,\sigma}$ costruite col metodo delle equazioni del trasporto. In quanto segue esporremo le idee principali di questa costruzione.

<u>Prodotto di fasi</u>

Per $\phi_1(t,s)$ e $\phi_2(t,s)$ soluzioni delle equazioni eiconali

$$\begin{cases} \partial_t \phi_j(t;s;x,\xi) = \lambda_j(t,x,\nabla_x\phi_j) \\ \phi_j(s,s) = x\cdot\xi \end{cases} \qquad j=1,2$$

definiamo il prodotto $\Phi_{i,j}(t,t_1,s)$ delle fasi $\phi_i(t,t_1)$ e $\phi_j(t_1,s)$ come la soluzione della equazione

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_{i,j}(t,t_1,s;x,\xi) = \lambda_i(t,x,\nabla_x\Phi_{i,j}) \quad , \quad t \gtrless t_1 \gtrless s, \\ \Phi_{i,j}(t_1,t_1,s) = \phi_j(t_1,s). \end{cases}$$

Le proprietà che useremo sono le seguenti (si vedano [K] e [T]):

(1) $\Phi_{i,j}(t,s,s) = \phi_i(t,s) \quad , \quad \Phi_{i,j}(t,t,s) = \phi_j(t,s).$

(2) La trasformazione canonica generata da $\Phi_{i,j}$

$(x,\xi) = T_{i,j}(t,t_1,s;(y,\eta))$ definita da

$$y = \nabla_\xi \Phi_{i,j}(t,t_1,s;x,\eta) \quad , \quad \xi = \nabla_x \Phi_{i,j}(t,t_1,s;x,\eta)$$

è quella che ad (y,η) fa corrispondere il punto finale della traiettoria $(x(\tau),\xi(\tau))$ di passo 1 in $[s,t]$ con punto di diramazione t_1, $t=t_o \geq t_1 \geq t_2 = s$, punto iniziale (y,η), che risolve

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_\xi \lambda_i(\tau,x,\xi); \ \frac{d\xi}{d\tau} = \nabla_x \lambda_i(\tau,x,\xi) \ \text{su} \ [t_1,t_o]$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_\xi \lambda_j(\tau,x,\xi); \ \frac{d\xi}{d\tau} = \nabla_x \lambda_j(\tau,x,\xi) \ \text{su} \ [t_2,t_1].$$

(3) Se $(x^1,\eta^1) = (x(t_1),\xi(t_1))$ è il valore per $\tau=t_1$ della traiettoria di cui al punto (2) allora (x^1,η^1) risolve l'equazione

$$\begin{cases} x^1 = \nabla_\xi \phi_i(t,t_1;x,\eta^1) \\ \eta^1 = \nabla_x \phi_j(t_1,s;x^1,\eta) \end{cases}$$ con (x,η) come parametro e vale

$$\Phi_{i,j}(t,t_1,s;x,\eta) = \phi_i(t,t_1;x,\eta^1)-x^1\cdot\eta^1+\phi_j(t_1,s;x^1,\eta) .$$

(4) $$\partial_{t_1}\Phi_{i,j}(t,t_1,s) = \lambda_j(t_1,x^1,\eta^1)-\lambda_i(t_1,x^1,\eta^1).$$

Se assumiamo una delle ipotesi $(I)_1$ e $(I)_2$ possiamo inoltre provare con argomenti simili a quelli di [M]:

(5) $$\Phi_{i,j}(t,t_1^*,s) = \Phi_{j,i}(t,t_1,s)$$

con $t_1^* = A^{-1}(A(s)-A(t_1+A(t))$ ed A la funzione introdotta nella proposizione 4.

La proprietà (2) chiarisce come si propaga il fronte d'onda di una ultradistribuzione sotto l'azione di un operatore integrale di Fourier con fase $\Phi_{i,j}$ omogenea.

Per mezzo di (1), (2) e (4) possiamo provare il seguente teorema con successive integrazioni per parti.

Teorema 5. Assumiamo l'ipotesi $(S.H.)_s$ per λ_1 e λ_2 omogenee. Consideriamo $E(t,s) = \int_s^t F(t,t_1,s)dt_1$ dove $F(t,t_1,s)$ è un operatore integrale di Fourier con fase $\Phi_{i,j}(t,t_1,s)$ ed ampiezza $f(t,t_1,s) \in C([s,t];\ S^{\infty,\sigma,\mu}) \cap \Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I}(s,t);S^{\infty,\sigma,\mu})$, $\mathscr{I}(s,t)$ aperto di $[s,t]$. Vale allora per $g \in G_0^{(\sigma)'}(R_x^n)$

$WF_\sigma(Eg) \subset$ [{punti finali traiettorie di passo zero su [s,t] e punto iniziale in $WF_\sigma(g)\} \cup \{(x,\xi);(x,\xi)=T_{i,j}(t,t_1,s;y,\eta),\ t_1 \notin \mathscr{I}(s,t),(y,\eta) \in WF_\sigma(g)\}]^{con}$.

Equazioni del trasporto

Assumiamo qui tutte le ipotesi del teorema (3) per il problema ivi considerato. Vogliamo costruire una $\mathscr{E}(t,s)$ tale che

$$\begin{cases} L\mathscr{E}(t,s) = \text{operatore } \sigma\text{-regolarizzante} \\ \mathscr{E}(s,s) = I \text{ (matrice identità di ordine 2).} \end{cases}$$

Esattamente come in [CZ] possiamo costruire $E_j(t,s)$ parametrice di $D_t-\lambda_j+c_{jj}$, $j=1,2$, rappresentata come un operatore integrale di Fourier con fase $\phi_j(t,s)$ ed ampiezza $e_j(t,s)\in C([0,T]^2;\ S^{\infty,\sigma,\sigma})$ data come sviluppo asintotico (*) $e_j \sim \sum_{\ell\geq 0} e_j^{\ell}$, usando il metodo delle equazioni del trasporto. (Si veda anche [CM] per il caso $\lambda_j=0$).

Cerchiamo poi la $\mathscr{E}(t,s)$ sotto la forma stabilita a priori:

$$\mathscr{E}(t,s) = \begin{bmatrix} E_1(t,s) + \int_s^t F_1(t,t_1,s)dt_1 & \int_s^t F_2(t,t_1 s)dt_1 \\ \int_s^t G_1(t,t_1,s)dt_1 & E_2(t,s)+\int_s^t G_2(t,t_1 s)dt_1 \end{bmatrix}$$

dove $F_j(t,t_1,s)$ è un F.I.O. con fase $\Phi_{1,2}(t,t_1,s)$, $j = 1,2$ e

$G_j(t,t_1,s)$ è un F.I.O. con fase $\Phi_{2,1}(t,t_1,s)$, $j = 1,2$.

Le rispettive ampiezze verranno determinate come sviluppi asintotici in $S^{\infty,\sigma,\sigma}$:

$$f_j(t,t_1,s)\sim\sum_{\ell\geq 0} f_j^{\ell}\ (t,t_1,s) \quad , \quad g_j(t,t_1,s)\sim\sum_{\ell\geq 0} g_j^{\ell}(t,t_1,s) \quad , \quad j=1,2.$$

Ricordiamo che per i risultati provati in [CZ], la composizione di un operato-

---

(*) Si rimanda a [CZ] per la definizione precisa di sviluppo asintotico in $S^{\infty,\sigma,\mu}$).

re pseudo differenziale con simbolo $p^1(x,\xi)\in \tilde{S}^{\infty,\sigma,1}$ e di un F.I.O. con fase $\phi\in\tilde{S}^{1,\sigma,\sigma}$ ed ampiezza $p^2(x,\xi)\in S^{\infty,\sigma,\sigma}$ è data mod. operatori σ-regolarizzanti, da un F.I.O. con la medesima fase ϕ ed ampiezza $q(x,\xi)\in S^{\infty,\sigma,\sigma}$ per la quale vale lo sviluppo

$$q(x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} q_j(x,\xi),$$

$$q_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \alpha!^{-1} D_y [D_\xi^\alpha p^1(x,\tilde{\nabla}_x\phi(x,y,\xi))p^2(y,\xi)]_{y=x}$$

dove $\tilde{\nabla}_x\phi(x,y,\xi) = \int_0^1 \nabla_x\phi(y+\theta(x-y),\xi)d\theta.$

Ricordiamo inoltre che un simbolo di $S^{\infty,\sigma,\mu}$ con sviluppo asintotico nullo è nella classe R^σ e che ogni F.I.O. con ampiezze in R^σ è un operatore σ-regolrizzante. Facendo agire L su $\mathscr{E}(t,s)$ e tenuto conto delle proprietà (1) e (5) di pag. 13 e 14, arriviamo così a considerare le seguenti equazioni del trasporto:

$$(T_0)\quad \begin{cases} D_t f_j^\circ + \sum_{h=1}^n a_h^1(t,t_1,s) D_{x_h} f_j^\circ + q_1(t,t_1,s) f_j^\circ + b_1(t,t_1,s)\Theta g_j^\circ = 0 \\ D_t g_j^\circ + \sum_{h=1}^n a_h^2(t,t_1,s) D_{x_h} g_j^\circ + q_2(t,t_1,s) g_j^\circ + b_2(t,t_1,s)\Theta f_j^\circ = 0\ , \quad j=1,2, \\ f_1^\circ(t_1,t_1,s)=0,\ f_2^\circ(t_1,t_1,s)=\tilde{e}_2(t_1,s), g_1^\circ(t_1,t_1,s))= \\ \qquad = \tilde{e}_1(t_1,s), g_2^\circ(t_1,t_1,s)=0 \end{cases}$$

$$
(T_\ell) \qquad \begin{cases} D_t f_j^\ell + \sum\limits_{h=1}^{n} a_h^1(t,t_1,s) D_{x_h} f_j^\ell + q_1(t,t_1,s) f_j^\ell + b_1(t,t_1,s) \Theta g_j^\ell = r_j^\ell(t,t_1,s) \\ D_t g_j^\ell + \sum\limits_{h=1}^{n} a_h^2(t,t_1,s) D_{x_h} g_j^\ell + q_2(t,t_1,s) g_j^\ell + b_2(t,t_1,s) \Theta f_j^\ell = s_j^\ell(t,t_1,s) \\ g_j^\ell(t_1,t_1,s) = f_j^\ell(t_1,t_1,s) = 0 \quad , \quad j=1,2, \quad \ell \geq 1. \end{cases}
$$

Qui l'operatore Θ è definito da $\Theta h(t,t_1,s) = h(t,t_1^*,s)\partial_{t_1} t_1^*$, con t_1^* come in (5) a pag. 14, a_h^1, $a_h^2 \in C([0,T]^3; S^{0,\sigma,\sigma})$, $q_1,q_2,b_1,b_2 \in C([0,T]^3; S^{a,\sigma,\sigma})$, ($\sigma$ e q come in $(W.P.)_s$), i simboli r_j^ℓ ed s_j^ℓ sono determinati univocamente da L e da f_j^k, g_j^k con $0 \leq k \leq \ell-1$ e costituiscono i termini di quattro sviluppi asintotici $\sum\limits_{\ell \geq 0} r_j^\ell$, $\sum\limits_{\ell \geq 0} s_j^\ell$, $j=1,2$, in $C([0,T]^3; S^{\infty,\sigma,\sigma})$.

Infine in (T_o) i simboli $\tilde{e}_j(t,s) \in C[0,T]^2; S^{\infty,\sigma,\sigma})$ sono determinati da $e_j(t,s)$ e dai termini di L. Vale il seguente:

<u>Teorema 6.</u> Le soluzioni dei problemi (T_o) e (T_ℓ) per $\ell=1,2,\ldots$, esistono e definiscono lo sviluppo asintotico di ampiezze in

$$
C([0,T]^3; S^{\infty,\sigma,\sigma}) \cap \Gamma^{(\sigma)}(\mathscr{I}(s,t); S^{\infty,\sigma,\sigma})
$$

dove $\mathscr{I}(s,t)$ è il complementare di $\mathscr{F}(s,t) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathscr{F}_\nu(s,t)$; $\mathscr{F}_\nu(s,t)$, come a pag.14, denota l'insieme dei punti di diramazione delle traiettorie di passo 1 su $[s,t]$ che si ottengono semplificando le traiettorie di passo ν con diramazioni in $[s,t] \setminus \mathscr{I}$ a traiettorie equivalenti.

Il teorema 3 può così essere provato tramite la proposizione 4, i teoremi 5 e 6.

BIBLIOGRAFIA (In ordine di citazione)

[CDeGS] F. COLOMBINI, E. De GIORGI, G. SPAGNOLO, Sur les equations hyperboliques avec des coefficients qui ne dependent que du temps. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 6 (1979), 511-559.

[CJS] F. COLOMBINI, E. JANNELLI, S. SPAGNOLO, Well-posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a non-strictly hyperbolic equation with coefficients depending on time. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 10 (1983), 291-312.

[N] T. NISHITANI, Sur les equations hyperboliques à coefficients qui sont hölderiens en t et de la classe de Gevrey in x. Bull. de Sc. Math. 107 (1983), 113-138.

[CT] Y. OHYA, S. TARAMA, Le problem de Cauchy a caracteristiques multiples dans la classe de Gevrey-coefficients hölderiens en t. In corso di pubblicazione.

[B] M.D. BRONSHTEIN, The Cauchy problem for hyperbolic operators with variable multiple characteristics. Trudy Moskov. Mat. Obsi., 41 (1980), 83-99.

[W] S. WAKABAYASHI, Singularities of solutions of the Cauchy problem for hyperbolic systems in Gevrey classes. Japan J. Math. 11 (1985), 157--201.

[Mz.] S. MIZOHATA, Propagation de la regularité au sense de Gevrey pour les operateurs differentiels a multiplicite constante. Sem. Eq. aux derives partielles hyp. et holomorphes, Hermann Paris, 1984.

[T] K. TANIGUCHI, Fourier integral operators in Gevrey class on R^n and the fundamental solution for a hyperbolic operator. Publ. R.I.M.S. Kyoto Un. 20 (1984), 491-542.

[C] M. CICOGNANI, On the propagation of singularities for hyperbolic operators with coefficients irregular in time. In corso di pubblicazione.

[MT] Y. MORIMOTO, K. TANIGUCHI, Propagation of wawe front sets of solutions of the Cauchy problem for hyperbolic equations in Gevrey classes. Osa-Ka J. of Math. Dicembre '86.

[CZ] L. CATTABRIGA, L. ZANGHIRATI, Fourier integral operators of infinite order on Gevrey spaces. Applications to the Cauchy problem for hyperbolic operators. In corso di pubblicazione.

[I] W. ICHINOSE, Propagation of singularities for a hyperbolic equation with non-regular characteristic roots. Osaka J. of Math. 17 (3) (1980), 703-750.

[K] H. KUMANO-GO, Pseudo differential operators. M.I.T. Press, 1982.

[M] Y. MORIMOTO, Fundamental solution for a hyperbolic equation with involutive characteristics of variable multiplicity. Comm. in part. diff. eq. 4 (6), (1979), 609-643.

[CM] L. CATTABRIGA, D. MARI, On a Cauchy problem in Gevrey spaces. In corso di pubblicazione.